TITLE:

# Moduli of complexes of coherent sheaves

AUTHOR(S):

稲場, 道明

CITATION:

稲場, 道明. Moduli of complexes of coherent sheaves. 代数幾何学シンポジューム記録 2001, 2001: 93-102

ISSUE DATE:

2001

URL:

http://hdl.handle.net/2433/214748

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅

Kyoto University Research Information Repository

2001年度 pp.93-102

# Moduli of complexes of coherent sheaves

稲場 道明

京都大学大学院理学研究科数学教室

## 1 Main theorem, motivation, etc

$S$ を noetherian scheme, $X$ を $S$ 上 flat な projective scheme とします. $(\mathrm{Sch}/S)$ を $S$ 上の locally noetherian scheme のなす category, (Sets) を集合の category とします。

関手 $\mathrm{Splcpx}_{X/S} : (\mathrm{Sch}/S)^{\circ} \to (\mathrm{Sets})$ を

$$\mathrm{Splcpx}_{X/S}(T) := \left\{ E^{\cdot} \;\middle|\; \begin{array}{l} E^{\cdot} \text{ is a bounded complex of coherent sheaves} \\ \text{on } X_T \text{ such that each } E^i \text{ is flat over } T \text{ and} \\ \text{for any } t \in T, (*) \text{ holds} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$$(*) \qquad \mathrm{Ext}^i_{X_t}(E^{\cdot}(t), E^{\cdot}(t)) \cong \begin{cases} k(t) & \text{if } i = 0 \\ 0 & \text{if } i = -1 \end{cases}$$

とおくことにより定義します. ここで

$$E^{\cdot} \sim F^{\cdot} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists L\text{: line bundle on } T \text{ such that } E^{\cdot} \cong F^{\cdot} \otimes L \text{ in } D(X_T)$$

とします. ただし $D(X_T)$ は $\mathcal{O}_{X_T}$-module の derived category です. また $E^{\cdot}(t) := E^{\cdot} \otimes k(t)$ とおいています.

$$\mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S} := \text{sheafification of } \mathrm{Splcpx}_{X/S} \text{ in étale topology}$$

とおきます. すると次の定理が成り立ちます.

**Theorem 1.1** $\mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S}$ は $S$ 上 locally separated な algebraic space で represent される.

もともと私がこの moduli space $\mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S}$ を考えたいと思ったきっかけは Fourier-Mukai 変換にあります. 例えば Fourier-Mukai 変換の典型的な例として, $A$ をアーベル多様体, $P$ を $A \times \hat{A}$ 上にある Poincare bundle, $p_1 : A \times \hat{A} \to A$, $p_2 : A \times \hat{A} \to \hat{A}$ を projection とする時に

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\hat{\Phi} : D(A) &\xrightarrow{\sim} D(\hat{A}) \quad \text{(equivalence of categories)} \\ E^{\cdot} &\mapsto \mathbf{R}p_{2*}(p_1^*(E^{\cdot} \otimes P)) \end{aligned}$$

というものがあります. これはしばしば simple sheaf の moduli space の間の同型を導き, 興味深い結果を導きます. しかし一般には sheaf の行き先が sheaf の category からはずれてしまうことが起こります. そこで, simple sheaf の moduli space を $\mathbf{R}\hat{\Phi}$ でうつした行き先として何らかの形で $D(\hat{A})$ の対象の moduli space があるに違いないと思い, complex の

moduli space を考えようとしたわけです．実際 simple sheaf の moduli space $\mathrm{Spl}^{\text{ét}}_{X/S}$ は $\mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S}$ の中に open subspace として入っていて，一方 $\mathbf{R}\hat{\Phi}$ は moduli space の間の同型 $\mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{\hat{A}}$ を導きます．他の種類の Fourier-Mukai 変換や dualizing functor も同様に complex の moduli space の間の同型を導きます．

derived category の対象の moduli space の具体例として Bridgeland 氏により導入された perverse point sheaf の moduli space というものがあります．これは flop の構成をするという驚くべき応用を持っています．

(これとは別に，coherent (co)system の moduli space も一つの例になっていると講演では話しましたが，これは私の勘違いであることを吉岡康太さんに指摘して頂きました．ごめんなさい.)

以下に定理の証明の方針を述べます (詳細は [6] 参照).

まず $S$ 上 locally of finite type な scheme $Z$ と smooth な全射 $\phi : Z \to \mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S}$ を見つけます．これができれば $R := Z \times_{\mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S}} Z$ とおいたとき，$R$ は $Z \times_S Z$ の subscheme となることがわかり，$Z/R$ として moduli space が実現されます．(ここの証明では base change theory などを用いていますが，本質的にはここがうまく行くように $\mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S}$ の定義で条件 $(*)$ を仮定したわけです.)

$Z, \phi$ をどのように見つけるかを考えます．任意に geometric point $E^{\cdot} \in \mathrm{Splcpx}_{X/S}(K)$ を取ります．整数 $l, l'$ で，$i < l'$ と $i > l$ について $E^i = 0$ となるものを取ります．このとき $0 \ll m_l \ll m_{l-1} \ll \cdots \ll m_{i+1} \ll m_i \ll \cdots$ と取れば，

$$V^{\cdot} : \cdots \to V_i \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_i) \xrightarrow{d^i} V_{i+1} \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_{i+1}) \to \cdots \to V_l \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_l)$$

という形の complex と quasi-isomorphism $V^{\cdot} \to E^{\cdot}$ が存在することがわかります．そこで，

$$V_{l'-2} \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_{l'-2}) \xrightarrow{d^{l'-2}} V_{l'-1} \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_{l'-1}) \to \cdots \to V_l \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_l)$$

という形の complex で $l'-1$ 番目で完全となっているものを parameter 付けする scheme $U$ を取ります．$U$ を適当な open subscheme に取りかえた後に

$$\operatorname{coker} d^{l'-2} \to V_{l'+1} \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_{l'+1}) \to \cdots \to V_l \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_l)$$

という complex の族により smooth morphism $U \to \mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S}$ が定義され，この像は初めに固定した $E^{\cdot}$ を含むように出来ます．このような $U$ たちを集めて $Z$ を作ります． ∎

$U \to \mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S}$ の smoothness の証明は複雑なので説明しませんが，次の事実を用いていることだけは注意しておきます．

**Remark 1.2** (i) $\mathrm{Splcpx}^{\text{ét}}_{X/S}$ の $E^{\cdot}$ での (relative) tangent space は $\mathrm{Ext}^1(E^{\cdot}, E^{\cdot})$ である．

(ii) lifting の obstruction は $\mathrm{Ext}^2(E^{\cdot}, E^{\cdot})$ にある．

## 2 A remark on the construction of known moduli spaces

ここでは complex の moduli space を作るアイデアを用いて既知の moduli space の構成を再考してみることにします.

**Example 2.1** Quot-scheme (Hilbert scheme) について.

$f : X \to S$ を noetherian scheme の間の flat projective morphism とします. $S$-ample line bundle $\mathcal{O}_X(1)$ を固定します. 簡単のため $S$ は連結と仮定します. $P(n)$ を numerical polynomial とし, $F$ を $S$ 上 flat な coherent $\mathcal{O}_X$-module とします. 関手

$$\mathrm{Quot}_F^P : (\mathrm{Sch}/S)^\circ \to (\mathrm{Sets}) :$$
$$T \to \left\{ K_1 \subset F_T ; \begin{array}{l} \text{coherent subsheaf such that } F_T/K_1 \text{ is } T\text{-flat} \\ \text{and } \chi((F_T/K_1)(t)(n)) = P(n) \text{ for any } t \in T \end{array} \right\}$$

を表現する scheme が Quot-scheme と呼ばれるものでした. もちろんこれはよく知られた基本的な概念ですが, 従来の flattening stratification を用いた証明とは少し違う構成法を考えてみます.

まず $\mathrm{Quot}_F^P$ の geometric point の族の有界性は認めて話を進めます ([8], Th 1.13 参照). $m_1 \gg 0$ と取れば, 任意の geometric point $p = [K_1 \subset F_K] \in \mathrm{Quot}_F^P(K)$ について, $i > 0$ に対し $H^i(F_K(m_1)) = 0, H^i(K_1(m_1)) = 0$ で, $K_1(m_1)$ が global section で生成されるとして良いです. $V_1 := H^0(K_1(m_1))$ とおいて

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_1) \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

とおきます. さらに $m_2 \gg m_1$ と取れば, $\mathrm{Quot}_F^P$ の任意の geometric point $p$ について, $H^i(\mathcal{O}_{X_p}(m_2 - m_1) = 0$, $H^i(K_2(m_2)) = 0$ $(i > 0)$ で, $K_2(m_2)$ が global section で生成されるとして良いです. $V_2 := H^0(K_2(m_2))$ とおいて完全列

$$V_2 \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_2) \longrightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}_{X_K}(-m_1) \longrightarrow F_K$$

が出来ます. このような完全列を parameter 付けすることにより Quot-scheme の構成を考えることにします.

まず $r_1 := \dim V_1$, $r_2 := \dim V_2$ とおきます. これらは上で取った geometric point $p \in \mathrm{Quot}_F^P(K)$ の取り方によらず一定です. $Z_1 := \mathrm{Grass}_{r_1}(f_*(F(m_1)))$ とおき, $\tilde{V}_1 \subset f_*(F(m_1)) \otimes \mathcal{O}_{Z_1}$ を universal subbundle とします. $Z_2 := \mathrm{Grass}_{r_2}(\tilde{V}_1 \otimes f_*(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1))$ とおいて $\tilde{V}_2 \subset \tilde{V}_1 \otimes f_*(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1)) \otimes \mathcal{O}_{Z_2}$ を universal subbundle とします. このとき, homomorphism の列

$$\tilde{V}_2 \otimes \mathcal{O}_{X_{Z_2}}(-m_2) \xrightarrow{d_2} \tilde{V}_1 \otimes \mathcal{O}_{X_{Z_2}}(-m_1) \xrightarrow{d_1} F_{Z_2}$$

が導かれます. $Z_2 \supset Y$ を $d_1 \circ d_2 = 0$ で定義される closed subscheme とします. $\tilde{K}_1 := \mathrm{coker}(d_2)_Y$ とおけば $\iota : \tilde{K}_1 \to F_Y$ が導かれます. そこで

$$Y' := \left\{ p \in Y \,\middle|\, \mathrm{coker}\,\iota(p) : \tilde{K}_1(p) \to F(p) \text{ is injective} \right\}$$

とおけば, [11], Theorem 22.5 より $Y'$ は $Y$ の open subscheme で, $\iota_{Y'}$ は単射となり, $\tilde{E} := \operatorname{coker}\iota_{Y'}$ は $Y'$ 上 flat となります. $\tilde{K}_2 := \ker((d_1)_{Y'})$ とおきます.

$$Y'' := \left\{ p \in Y' \,\middle|\, \begin{array}{l} \chi(\tilde{E}(p)(n)) = P(n), \text{任意の } i > 0 \text{ について} \\ H^i(\tilde{K}_1(p)(m_1)) = 0, H^i(\tilde{K}_2(p)(m_2)) = 0, \\ \tilde{V}_1 \otimes k(p) \xrightarrow{\sim} H^0(\tilde{K}_1(p)(m_1)), \tilde{V}_2 \otimes k(p) \xrightarrow{\sim} H^0(\tilde{K}_2(p)(m_2)) \end{array} \right\}$$

は $Y'$ の open subscheme となり, $(\tilde{K}_1)_{Y''} \subset F_{Y''}$ により morphism

$$\alpha : h_{Y''} \longrightarrow \mathrm{Quot}_F^P$$

が出来て, これは同型となります.

(証明) 任意に $y = [K_1 \subset F_T] \in \mathrm{Quot}_F^P(T)$ を取ります. 完全列

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow (f_{T*})(K_1(m_1)) \otimes \mathcal{O}_{X_T}(-m_1) \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$$

により $K_2$ を定めます. このとき,

$$\begin{cases} (f_{T*})(K_1(m_1)) \subset f_*(F(m_1)) \otimes \mathcal{O}_T, \\ (f_{T*})(K_2(m_2)) \subset (f_{T*})(K_1(m_1)) \otimes f_*(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1)) \end{cases}$$

により $x \in Z_2(T)$ が定まります. 作り方より $x \in Y''(T)$ となり, $\alpha(T)(x) = y$ となります. よって $\alpha(T)$ は全射となります.

次に $x_1, x_2 \in Y''(T)$ で $\alpha(T)(x_1) = \alpha(T)(x_2)$ となるものを取ります. 各 $x_i$ は subbundle

$$\begin{cases} V_1^{(i)} \subset f_*(F(m_1)) \otimes \mathcal{O}_T, \\ V_2^{(i)} \subset V_1^{(i)} \otimes f_*(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1)) \end{cases}$$

に対応しているとします. $V_2^{(i)} \otimes \mathcal{O}_{X_T}(-m_2) \xrightarrow{d_2^{(i)}} V_1^{(i)} \otimes \mathcal{O}_{X_T}(-m_1) \xrightarrow{d_1^{(i)}} F_T$ を誘導される完全列とします. $K_1^{(i)} := \operatorname{coker} d_2^{(i)}$, $K_2^{(i)} := \ker d_1^{(i)}$ とおきます. $\alpha(T)(x_1) = \alpha(T)(x_2)$ なので可換図式

$$\begin{array}{ccc} K_1^{(1)} & \hookrightarrow & F_T \\ {\scriptstyle \theta_1} \downarrow \wr & & \| \\ K_1^{(2)} & \hookrightarrow & F_T \end{array}$$

が出来ます. $\theta_1$ から可換図式

$$\begin{array}{ccccc} V_1^{(1)} & \xrightarrow{\sim} & f_{T*}(K_1^{(1)}(m_1)) & \hookrightarrow & f_*(F(m_1)) \otimes \mathcal{O}_T \\ {\scriptstyle \bar{\theta}_1} \downarrow \wr & & \wr \downarrow {\scriptstyle H^0(\theta_1(m_1))} & & \| \\ V_1^{(2)} & \xrightarrow{\sim} & f_{T*}(K_1^{(2)}(m_1)) & \hookrightarrow & f_*(F(m_1)) \otimes \mathcal{O}_T \end{array}$$

ができます. さらに完全可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & K_2^{(1)} & \longrightarrow & V_1^{(1)} \otimes \mathcal{O}_{X_T}(-m_1) & \longrightarrow & K_1^{(1)} & \longrightarrow 0 \\ & {\scriptstyle \theta_2} \downarrow \wr & & \wr \downarrow {\scriptstyle \bar{\theta}_1 \otimes 1} & & \wr \downarrow {\scriptstyle \theta_1} & \\ 0 \longrightarrow & K_2^{(2)} & \longrightarrow & V_1^{(2)} \otimes \mathcal{O}_{X_T}(-m_1) & \longrightarrow & K_1^{(2)} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

ができて可換図式

$$\begin{array}{ccccc} V_2^{(1)} & \xrightarrow{\sim} & f_{T*}(K_2^{(1)}(m_2)) & \hookrightarrow & V_1^{(1)} \otimes f_*(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1)) \\ {\scriptstyle \bar{\theta}_2} \downarrow \wr & & \wr \downarrow {\scriptstyle H^0(\theta_2(m_2))} & & \wr \downarrow {\scriptstyle \bar{\theta}_1 \otimes 1} \\ V_2^{(2)} & \xrightarrow{\sim} & f_{T*}(K_2^{(2)}(m_2)) & \hookrightarrow & V_1^{(2)} \otimes f_*(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1)) \end{array}$$

が導かれます. よって $x_1 = x_2$ in $Y''(T)(\subset Y(T))$ となります. 以上より $\alpha(T)$ が単射となることもわかって証明が完結します. ∎

$f : X \to S$ が flat とは限らない projective morphism で, $F$ も $S$ 上 flat とは限らない coherent sheaf のときの Quot-scheme $\mathrm{Quot}_F^P$ の representability は, [[1], Theorem (2.6), Step I] の論法で, 上で述べた flat の場合に帰着されます. 構成された Quot-scheme が projective となることは valuative criterion (例えば [4], IV, (2.8.1)) からわかります.

**Example 2.2** semistable sheaf の moduli space について.

semistable sheaf の moduli space の構成は Quot-scheme を用いた構成法 ([13]) が一般的によく知られていると思いますが, ここではそれとは少し違って, quiver variety に埋め込むことにより moduli space を構成する方法を考えてみます. (厳密に証明を書くととても長くなってしまうので, 難しいところは引用で済ませて, 証明の概略のみを書くことにします.)

$X$ を代数的閉体 $k$ 上の projective scheme とし, $\mathcal{O}_X(1)$ を ample line bundle とします. $X$ 上の coherent sheaf $E$ の ($\mathcal{O}_X(1)$ に関する) Hilbert polynomial は

$$\chi(E(n)) = \sum_{i=0}^{d} a_i(E) \binom{n+d-i}{d-i} \quad (a_i(E) \in \mathbf{Z})$$

と書けます. (以下この notation を用います.)

**Definition 2.3** $X$ 上の coherent sheaf $E$ が purely $d$-dimensional とは, $E \neq 0$ で, 任意の non-zero coherent subsheaf $F \subset E$ について $\dim \mathrm{Supp}\, F = d$ となることを言います.

**Definition 2.4** $X$ 上の purely $d$-dimensional coherent sheaf $E$ が stable (semistable) とは, $0 < a_0(F) < a_0(E)$ となる任意の coherent subsheaf $F \subset E$ について

$$\chi(F(n))/a_0(F) < \chi(E(n))/a_0(E) \quad \text{for } n \gg 0$$
$$(\text{resp. } \leq)$$

が成り立つことを言います.

Hilbert polynomial $P(n)$ を固定した semistable sheaf の族の有界性の問題は正標数の場合長い間未解決でしたが, 最近 Langer 氏によって解決されました. ([9] 参照.)

この有界性は認めて十分大きい整数 $m_2 \gg m_1 \gg m_0 \gg 0$ を固定します. Hilbert polynomial $P(n)$ を持つ semistable sheaf $E$ に対し $V_0 := H^0(E(m_0))$ とおき, $K_1 :=$

$\ker(V_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \to E)$, $V_1 := H^0(K_1(m_1))$, $K_2 := \ker(V_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) \to K_1)$, $V_2 := H^0(K_2(m_2))$ とおきます. すると完全列

$$V_2 \otimes \mathcal{O}_X(-m_2) \longrightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) \longrightarrow V_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \longrightarrow E \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

ができます. このような完全列を parameter 付けすることにより semistable sheaf の moduli space を構成することを考えます.

$$A := \mathrm{Hom}(V_2, V_1 \otimes H^0(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1))) \oplus \mathrm{Hom}(V_1, V_0 \otimes H^0(\mathcal{O}_X(m_1 - m_0)))$$

とおき, これを affine space と見なします. $A$ 上には universal family

$$V_2 \otimes \mathcal{O}_{X_A}(-m_2) \xrightarrow{d_2} V_1 \otimes \mathcal{O}_{X_A}(-m_1) \xrightarrow{d_1} V_0 \otimes \mathcal{O}_{X_A}(-m_0)$$

があります. $G := GL(V_0) \times GL(V_1) \times GL(V_2)$ とおけば $G$ は $A$ に自然に作用します. character

$$\chi : G \to \mathbf{G}_m; \quad (g_0, g_1, g_2) \mapsto \det(g_0)^{\alpha_0} \det(g_1)^{\alpha_1} \det(g_2)^{\alpha_2}$$

を

$$\begin{cases} \alpha_0 := \dim V_2 + N \dim V_1, \\ \alpha_1 := -N \dim V_0, \\ \alpha_2 := -\dim V_0 \end{cases}$$

とおくことにより定義します. ここで $N > 0$ は整数とします. 以下の定義は [7], Definition 1.1 の特別な場合です.

**Definition 2.5** $y = [V_2 \otimes \mathcal{O}_X(-m_2) \overset{d_2(y)}{\to} V_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) \overset{d_1(y)}{\to} V_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0)] \in A$ が ($\chi$ に関して) stable (resp. semistable) とは次が成り立つことを言います:
vector subspaces $W_2 \subset V_2$, $W_1 \subset V_1$, $W_0 \subset V_0$ が与えられて可換図式

$$\begin{array}{ccccc} W_2 \otimes \mathcal{O}_X(-m_2) & \longrightarrow & W_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) & \longrightarrow & W_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V_2 \otimes \mathcal{O}_X(-m_2) & \overset{d_2(y)}{\longrightarrow} & V_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) & \overset{d_1(y)}{\longrightarrow} & V_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \end{array}$$

を満たして $(0,0,0) \neq (W_0, W_1, W_2) \neq (V_0, V_1, V_2)$ となるとき, $\alpha_0 \dim W_0 + \alpha_1 \dim W_1 + \alpha_2 \dim W_2 > 0$ (resp. $\geq 0$) となる.

$A(\chi)^{ss} := \{y \in A \,|\, y$ は ($\chi$ に関して) semistable$\}$ と置けば, quiver variety の一般論 ([7] 参照) より $A(\chi)^{ss}$ は $A$ の open set となり, GIT quotient $A(\chi)^{ss}/\!/G$ が存在して quasi-projective となります.

$A \supset Y$ を $d_1 \circ d_2 = 0$ で定義される closed subscheme とします.

$$Z := \left\{ p \in Y \,\middle|\, \begin{array}{l} \ker(d_1(p)) = \mathrm{im}(d_2(p)) \text{ で } \mathrm{coker}\, d_1(p) \text{ は semistable sheaf,} \\ \chi(\mathrm{coker}\, d_1(p)(n)) = P(n), V_0 \overset{\sim}{\to} H^0((\mathrm{coker}\, d_1(p))(m_0)), \\ V_1 \overset{\sim}{\to} H^0((\mathrm{coker}\, d_2(p))(m_1)), V_2 \overset{\sim}{\to} H^0((\ker(d_1(p)))(m_2)) \end{array} \right\}$$

は $Y$ の open subscheme となります.

方針としては, $m_2 \gg m_1 \gg m_0 \gg 0$ と取ることにより $Z \subset A(\chi)^{ss}$ を示し, GIT quotient $Z//G$ として semistable sheaf の $S$-equivalence class の coarse moduli scheme を作りたいわけです.

**Lemma 2.6** 十分大きい整数 $m_0$ が存在して, $m \geq m_0$ となる任意の整数 $m$ と, Hilbert polynomial が $P(n)$ となる $X$ 上の任意の semistable sheaf $E$ について以下が成り立つ:

(i) $E(m)$ は global sections で生成され, $i > 0$ について $H^i(E(m)) = 0$.

(ii) $E$ の任意の non-zero coherent subsheaf $F$ について,

$$\dim H^0(F(m)) \leq \frac{a_0(F)}{a_0(E)} \dim H^0(E(m)).$$

さらに等号成立は $n$ に関する多項式として $\chi(F(n))/a_0(F) = \chi(E(n))/a_0(E)$ となることと同値.

証明は [10], Proposition 4.10 参照. ∎

上の Lemma を満たす $m_0$ を一つ固定することにします.

**Proposition 2.7** 十分大きい整数 $m_1'$ が存在して, $m_1 \geq m_1'$ なる任意の整数 $m_1$ に対して十分大きい整数 $m_2'$ が存在して, $m_2 \geq m_2'$ なる任意の整数 $m_2$ に対して, $Z \subset A(\chi)^{ss}$ となる. さらに $y \in Z$ について, $\operatorname{coker} d_1(y)$ が stable sheaf なら $y$ は $A$ の stable point となる.

*Proof.* まず, Hilbert polynomial $P(n)$ を持つ $X$ 上の semistable sheaf $E$ と vector subspace $V' \subset H^0(E(m_0))$ に対し $V' \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \hookrightarrow H^0(E(m_0)) \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \to E$ の像を $E'(V')$ と書くことにします. すると

$$\mathcal{F} := \left\{ E'(V') \;\middle|\; \begin{array}{l} V' \subset H^0(E(m_0)),\ E \text{ は Hilbert polynomial} \\ P(n) \text{ を持つ } X \text{ 上の semistable sheaf} \end{array} \right\}$$

は有界な族となります. $m_0$ に関して Lemma 2.6 (ii) が成り立つことを用いれば, 十分大きい整数 $m_1'$ が存在して, 任意の $m_1 \geq m_1'$ に対し十分大きい整数 $m_2'$ が存在して, 任意の $m_2 \geq m_2'$ と任意の $E'(V') \in \mathcal{F}$ に対し

$$h^0(E'(V')(m_0)) \leq \frac{(h^0(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1)) + N)h^0(E'(V')(m_1)) - h^0(E'(V')(m_2))}{(h^0(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1)) + N)P(m_1) - P(m_2)} P(m_0) \tag{2}$$

と出来ます. さらに, $K_1' := \ker(V' \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \to E'(V'))$, $K_2' := \ker(H^0(K_1'(m_1)) \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) \to K_1')$ と置いた時に, $K_1'(m_1)$ と $K_2'(m_2)$ がともに global sections で生成され, $i > 0$ について $H^i(K_1'(m_1)) = 0, H^i(K_2'(m_2)) = 0$ として良いです.

さて, $y \in Z$ を任意に取ります. 図式

$$\begin{array}{ccccc} W_2 \otimes \mathcal{O}_X(-m_2) & \longrightarrow & W_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) & \longrightarrow & W_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V_2 \otimes \mathcal{O}_X(-m_2) & \xrightarrow{d_2(y)} & V_1 \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) & \xrightarrow{d_1(y)} & V_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \end{array}$$

を可換にするような vector subspaces $W_0 \subset V_0, W_1 \subset V_1, W_2 \subset V_2$ が与えられたとします. $W_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \hookrightarrow V_0 \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \to \operatorname{coker} d_1(y)$ の像 $E'(W_0)$ を考えます. $E'(W_0)$ に対して先程の議論と同様にして $K_1', K_2'$ を定めて $W_1' := H^0(K_1'(m_1)), W_2' := H^0(K_2'(m_2))$ と置けば, $W_1 \subset W_1' \subset V_1, W_2 \subset W_2' \subset V_2$ となります. そして

$$h^0(E'(W_0)(m_1)) = h^0(\mathcal{O}_X(m_1 - m_0)) \dim W_0 - \dim W_1'$$
$$h^0(E'(W_0)(m_2)) = h^0(\mathcal{O}_X(m_2 - m_0)) \dim W_0 - h^0(\mathcal{O}_X(m_2 - m_1)) \dim W_1' + \dim W_2'$$

となることに注意すれば, 不等式 (2) から

$$(\dim V_2 + N \dim V_1) \dim W_0 - N \dim V_0 \dim W_1 - \dim V_0 \dim W_2 \geq 0$$

となることがわかって $y \in A(\chi)^{ss}$ となります.

後半の証明も上の議論と同様にしてわかります. ∎

$$P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i(P) \binom{n+d-i}{d-i}$$

と書いたとき, $0 < r < a_0(P)$ となる任意の整数 $r$ に対し, Lemma 2.6 と Proposition 2.7 が, $P(n)$ の代わりに $P(n)/r$ についても成り立つとしておいて良いです.

$$\pi : Y \cap A(\chi)^{ss} \longrightarrow Y \cap A(\chi)^{ss} // G$$

を quotient map とします. すると次が言えます.

**Lemma 2.8** $\pi^{-1}(\pi(Z)) = Z$.

*Proof.* 任意に $y \in \pi^{-1}(\pi(Z))$ を取ります. すると $\exists y' \in Z$ で $\pi(y') = \pi(y)$ となります. $\operatorname{coker} d_1(y')$ の Jordan-Hölder filtration $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_l = \operatorname{coker} d_1(y')$ を取ります. 各 $F_i$ に対して, (1) と同様の方法で resolution

$$V_2^{(i)} \otimes \mathcal{O}_X(-m_2) \longrightarrow V_1^{(i)} \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) \longrightarrow V_0^{(i)} \otimes \mathcal{O}_X(-m_0) \longrightarrow E_i \longrightarrow 0$$

を取ります. $y_i := [V_2^{(i)} \otimes \mathcal{O}_X(-m_2) \to V_1^{(i)} \otimes \mathcal{O}_X(-m_1) \to V_0^{(i)} \otimes \mathcal{O}_X(-m_0)]$ と置けば, filtration $0 = y_0 \subset y_1 \subset \cdots \subset y_l = y'$ が出来ます. $\bigoplus_{i=1}^{l} y_i/y_{i-1}$ に対応する $A$ の点を $y''$ とするとき, [7], Proposition 3.2 より $\pi(y'') = \pi(y') = \pi(y)$ となり, $y''$ の $G$-orbit は closed となります. $y''$ は $\bigoplus_{i=1}^{l} F_i/F_{i-1}$ の resolution に対応しているので $y'' \in Z$ であり, $y$ の $G$-orbit の閉包は $y''$ を含むので, $y \in Z$ となることがわかります. ∎

$M := \pi(Z)$ と置けば, Lemma 2.8 から $M$ は $Y \cap A(\chi)^{ss} // G$ の open set となることがわかり, $M = Z // G$ となることがわかります. この $M$ が Hilbert polynomial が P(n) の $X$ 上の semistable sheaf の $S$-equivalence class の coarse moduli scheme となります. Langton の定理の一般化 ([10], Theorem 7.6) より $M$ は $k$ 上 projective となることがわかります.

**Example 2.9** Bridgeland 氏により定義された perverse structure sheaf の moduli space について.

$f: Y \to X$ を射影多様体の間の birational morphism とし, $\mathbf{R}f_*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$ と仮定し, さらに任意の $x \in X$ について $\dim f^{-1}(x) \leq 1$ と仮定します. Bridgeland 氏により定義された perverse structure sheaf とは

$$\iota : F \to \mathcal{O}_Y$$

で代表される $D(Y)$ の元で条件

(a) $f_*(F) \to \mathcal{O}_X$ が単射で

(b) $f^*f_*(F) \to F$ が全射

を満たすものでした ([3] 参照). Bridgeland 氏はここで出てくる $F$ を parameter 付けするために Quot-scheme を用いることにより perverse structure sheaf の moduli space の構成をしましたが, ここでも quiver variety に埋め込むことにより moduli space を構成することが出来ます.

$X$ 上の ample line bundle $\mathcal{O}_X(1)$ を固定して $L := f^*\mathcal{O}_X(1)$ とおきます. さらに $Y$ 上の ample line bundle $\mathcal{O}_Y(1)$ も固定します. Example 2.1, 2.2 のように $m_2 \gg m_1 \gg m_0 \gg 0$ と取って $F$ の resolution

$$V_2 \otimes \mathcal{O}_Y(-m_2) \longrightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}_Y(-m_1) \longrightarrow V_0 \otimes L^{\otimes -m_0} \longrightarrow F \to 0$$

を (1) と同様の方法で作れば perverse structure sheaf $[F \to \mathcal{O}_Y]$ は

$$V_2 \otimes \mathcal{O}_Y(-m_2) \longrightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}_Y(-m_1) \longrightarrow V_0 \otimes L^{\otimes -m_0} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

で表されます.

$$\begin{aligned} B := \mathrm{Hom}(V_2, V_1 \otimes H^0(\mathcal{O}_Y(m_2 - m_1))) \oplus \mathrm{Hom}(V_1, V_0 \otimes H^0(L^{\otimes -m_0}(m_1))) \\ \oplus \mathrm{Hom}(V_0, H^0(L^{\otimes m_0})) \end{aligned}$$

とおいてこれを affine space と見なします. $B \supset U$ を perverse structure sheaf からくる部分を parameter 付けする subscheme とします. $G := GL(1) \times GL(V_0) \times GL(V_1) \times GL(V_2)$ と置けば $G$ は $B, U$ に自然に作用します. character

$$\chi : G \to \mathbf{G}_m; \quad (g, g_0, g_1, g_2,) \mapsto \det(g)^{\alpha} \det(g_0)^{\alpha_0} \det(g_1)^{\alpha_1} \det(g_2)^{\alpha_2}$$

を, $\alpha > 0$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 < 0$ となるように取れば, $U$ は $B$ の ($\chi$ に関する) stable point の集合 $B(\chi)^s$ に含まれます. そこで geometric quotient $U/G$ を取ることが出来て, これが perverse structure sheaf の moduli space となります.

# 参考文献

[1] A. Altman and S. Kleiman, Compactifying the Picard scheme, Adv. in Math., 35 (1980), no. 1, 50-112.

[2] M. Artin, Versal deformations and algebraic stacks, Invent. Math. 27, (1974), 165-189.

[3] T. Bridgeland, Flops and derived categories, math. AG/0009053.

[4] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique, Chaps. III,IV, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 11,17,20,24,28,32, (1961-1967).

[5] R. Hartshorne, Residues and duality, Lect. Notes Math. 20, Springer-Verlag (1966).

[6] M. Inaba, Toward a definition of moduli of complexes of coherent sheaves on a projective scheme (to appear).

[7] A. King, Moduli of representations of finite dimensional algebras, Quarterly J. of Math. 45 (1994), 515-530.

[8] S. Kleiman, Les Théorèm de Finitude pour de Foncteur de Picard, in "Théorie des Intersections et Théorèm de Riemann-Roch"(SGA 6), Lecture Notes in Mathematics No. 225, Springer Verlag, (1971).

[9] A. Langer, Semistable sheaves in positive characteristic (to appear).

[10] M. Maruyama, Construction of moduli spaces of stable sheaves via Simpson's idea, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 179. Dekker, New York, (1996)

[11] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge studies in advanced mathematics 8 (1989).

[12] S. Mukai, Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with application to Picard sheaves, Nagoya Math. J, 81, (1981), 153-175.

[13] C. T. Simpson, Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety, I. Inst. Hautes Études Sci.

E-mail address: inaba@kusm.kyoto-u.ac.jp